

Finalprov Astronomiolympiaden 2024

Astronomisk Ungdoms Astronomiolympiadgrupp

16 April 2024
kl 9:00 till 13:00

Detta är finalprovet för den svenska Astronomiolympiaden 2024. De 3 personer med högst poäng kommer erbjudas plats i det svenska laget i *International Olympiad on Astronomy & Astrophysics (IOAA)* i Brasilien, i augusti.

Lycka till!

Namn |

Provet börjar på nästa sida. Vänd ej på provet förrän klockan slår 9:00. Sluta skriva omedelbart när klockan slår 13:00.

Provet har totalt 120 poäng.

Tillåtna verktyg:

Skrivdon, kladdpapper, **ej symbolhanterande räknare, ingen egen formelsamling** (förutom sista sidan av provbladet). **Svara på varje fråga på separata papper, och se till att numrera alla sidor du lämnar in.**

Jag har svarat på följande frågor (kryssa i):

1	2	3	4	5	6	7

1 Anders på jorden (8p)

Anders står på norra halvklotet och lade märke till att längden hos den kortaste skuggan för en 1,00 m lång vertikal stång en dag var 1,83 m och att den längsta skuggan samma dag var 9,99 m. Beräkna latituden för observatören och solens deklination denna dag.

2 Philip i perigee (11p)

Ett telekom-företag vill skicka upp Philip i en satellit, med totalmassa 29 ton där Philips massa ingår, till GEO (Geostationary Orbit) från LEO (Low Earth Orbit) för att utföra viktiga experiment. En satellit i GEO har en konstant position över en punkt över jordens ekvator och har därför samma period som jordens rotation runt sin egna axel. LEO ligger ungefär 2000 km över jordens yta. Både LEO och GEO är cirkulära banor. Bestäm den totala rörelsemängdsförändringen för att utföra en Hohmann-övergång mellan banorna.

3 Galaxer i mina braxer (17p)

Alexander vill uppskatta avståndet till en avlägsen supernova av typ 1a. Den han observerade hade en apparent magnituden på 21,9. Antag att värdgalaxens egenrörelse är 0.

- Hur långt borta är galaxen?
- Antag att universum är platt och endast består av materia och mörk energi. Bestäm den kritiska densiteten vid galaxens rödförskjutning. Dagens massdensitet är $\rho_{m,0} = 2,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$.

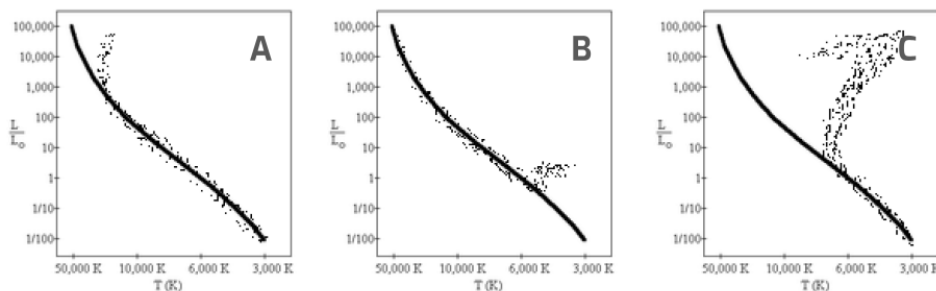
4 Stjärnornas åldersdomshem (17p)

Nedan finns HR-diagram för 3 stjärnhopar.

- Ordna hoparna enligt ålder och förklara varför.
- Uppskatta åldern av stjärnhop A. Till er hjälp har ni att astrofysiker funnit dessa empiriska förhållanden för huvudserie-stjärnor:

$$L \sim M^{3,5}, \quad t \sim M^{-2,5}$$

där L är stjärnans luminositet, M dess massa och t dess livstid på huvudserien. Solen kommer leva ca 10 miljarder år på huvudserien.



Figur 1: Tre stjärnhopar i olika åldrar, L_0 står för solens luminositet.

5 Hugo och teleskopet (20p)

För ett ickeroterande oladdat svart hål kan man bestämma dess Hawkingstrålning. Detta motsvarar avdunstningen av ett svart hål och kan approximeras som svartkroppsstrålning. I verkligheten kan även andra typer av partiklar strålas ut, men för enkelhetens skull antar vi att strålningen endast består av fotoner. Hawkingtemperaturen för strålningen ges enligt

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B}.$$

Hugo observerar ett svart hål med sitt teleskop. Det svarta hålet har massan $M = 10^{11}$ kg. Det svarta hålet befinner sig på ett avstånd 0,1 Mpc. I många fall väljer man i fysik att skriva \hbar , vilket är ett alternativt sätt att skriva $\frac{h}{2\pi}$.

- a) Bestäm vilken diameter på Hugos teleskop som krävs för att han skall kunna observera det svarta hålets Hawkingstrålning. Antag att Hugo kan uppfatta alla våglängder på hela spektrumet och att gränsmagnituden för ett teleskop beror på dess diameter (i meter) genom

$$m = 16,77 + 5 \log D.$$

- b) Bestäm det svarta hålets resterande livstid t om det svarta hålet håller en konstant Hawkingstrålning på $P = \frac{E}{t}$.

6 Det är lätt att skina när man är omgiven av stjärnor (20p)

Herkuleshopen, M13, är en klotformig globulär stjärnhop (kluster) i stjärnbilden Herkules. M13 är 6800 pc från oss och har en skenbar storlek på 20 bågminuter (i diameter) vilket motsvarar en radie på 19,8 pc, dessutom är magnituden av M13 5,8.

- a) Om vi uppskattar att alla stjärnor i M13 liknar vår sol (vilket inte är ett korrekt antagande, se uppgift 4), hur mycket massa finns då i M13?
- b) Uppskatta medelavståndet mellan två närliggande stjärnor i stjärnhopen.

7 En kärnfull fråga (27p)

En högt aktuell forskningsfråga är hur densiteten av neutronstjärnor varierar med radien. Detta uttrycks generellt genom en *equation of state* (EOS). Att studera EOS kan öka vår förståelse för både neutronstjärnor och grundläggande kärnfysik [1]. I denna fråga skall vi undersöka en EOS som använder styckvisa polytoper¹ och använda data från Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) för att inferera massan av bly [3]. På detta sätt är det också möjligt att begränsa modellparametrar för EOS genom att jämföra med mätningar av kärnmassor.

Vi kommer att börja med att undersöka frekvensen av utsända gravitationsvågor, och utifrån ett givet värde på frekvensen ta reda på vilken av våra modeller som kan anses ligga i linje med denna frekvens. Därefter skall vi vidare dra slutsatser kring modellens giltighet genom en koppling mellan våra modeller och massan av atomkärnor som vi kan mäta.

Låt oss anta att vi observerar en sammansmältning av två neutronstjärnor. Låt systemet vara symmetriskt och approximativt cirkulärt, d.v.s. båda neutronstjärnorna har lika stor massa om $1,4M_{\odot}$. Dessa system emitterar gravitationsvågor till följd av kropparnas rörelse, som har en frekvens som är dubbelt så stor som orbitalfrekvensen.

¹En polytrop är ett särskilt beroende mellan tryck och densitet, som inte är vidare relevant här.

- a) Antag att neutronstjärnorna har ett avstånd mellan sig lika med a . Beräkna frekvensen av de utsända gravitationsvågorna, f_{GW} .
- b) För EOS med styckvisa polytroper kan radien för en $1,4M_{\odot}$ neutronstjärna uttryckas approximativt som

$$R_{1,4} \simeq 9,68 + 0,168p_1 - 0,00120p_1^2 \text{ km},$$

där $0 \leq p_1 \leq 20,933 \text{ MeV}$ är ett tryck och genomgående anges i MeV. I detta empiriska samband ignorerar vi dimensionsfel.

Utgå från Tabell 1 nedan. Antag att vi har observerat att symmetriska binära neutronstjärnsystem med massorna ovan i genomsnitt har en frekvens om $(4500 \pm 300) \text{ Hz}$ (vid provdagen stod det $(1100 \pm 150) \text{ Hz}$) vid sammansmältningsogonblicket. Bestäm vilken av modellerna som kan anses ligga i linje med dessa observationer. Antag att de kan anses ligga i linje med observationerna om de ligger inom den angivna felmarginalen.

Modell	p_1 [MeV]	γ
1	14,304	2,533
2	20,933	2,770
3	9,676	2,290

Tabell 1: Modellparametrar för tre olika polytropiska EOS. Parametern γ är en dimensionslös parameter.

- c) Massan av bly-208 ($^{208}_{82}\text{Pb}$) är enligt experiment i labb mätt till $207,976652 \text{ Da}$ [2]. Utifrån en enklare teoretisk modell kan vi uttrycka bindningsenergin av bly-208 som²

$$E_B(^{208}_{82}\text{Pb}) = 1549,3 + 21,815 \cdot 1,85^{-\gamma} p_1 \text{ MeV}.$$

$$(\text{Stod under provdagen: } E_B(^{208}_{82}\text{Pb}) = 1844,4 - 21,815 \cdot 1,85^{-\gamma} p_1 \text{ MeV}.)$$

Bestäm utifrån detta vilken av de ovan givna modellerna som överensstämmer bäst med mätningar.

- d) Antag att vi undersöker en modell där vi har en symmetrisk sammanslagning av lika massiva svarta hål istället för neutronstjärnor. Om den gravitationsvågsfrekvensen vid sammansmältningen är densamma som i delfråga b), vad är då massan av en av de svarta hålen?

Referenser

- [1] K Hebeler m. fl. “Equation of state and neutron star properties constrained by nuclear physics and observation”. I: *The Astrophysical Journal* 773.1 (2013), s. 11.
- [2] WJ Huang m. fl. “The AME 2020 atomic mass evaluation (I). Evaluation of input data, and adjustment procedures”. I: *Chinese Physics C* 45.3 (2021), s. 030002.
- [3] Andrew W Steiner, James M Lattimer och Edward F Brown. “Neutron star radii, universal relations, and the role of prior distributions”. I: *The European Physical Journal A* 52.2 (2016), s. 18.

²Har du tid över kommer här en liten sidenote. Idén i denna fråga är att formuleringen av en EOS samspelar med energin i nukleär materia. Bland annat betraktar vi implicit en s.k. symmetrienergi, som är energin som uppkommer då materia avviker från lika andel protoner och neutroner. Detta är en viktig del i modelleringen av neutronstjärnor, men är också något som tas i beaktning vid teoretiska beräkningar av atomkärnors massor. Här betraktar vi en sammanslagning av dessa betraktelser och den s.k. *liquid drop modellen* för kärnmassor för att se hur observationer kan kopplas till massan av atomkärnor.

Givna solsystemsdata, värden och formler

Himlakropp	Diameter (km)	Avstånd från solen (10^6 km)	Massa (kg)
Solen	$1,393 \cdot 10^6$	—	$1,989 \cdot 10^{30}$
Merkurius	4879,4	57,9	$3,301 \cdot 10^{23}$
Venus	12104	108,2	$4,868 \cdot 10^{24}$
Jorden	12756	149,597870	$5,972 \cdot 10^{24}$
Mars	6779	227,9	$6,417 \cdot 10^{23}$
Jupiter	142800	778,3	$1,898 \cdot 10^{27}$
Saturnus	120660	1427,0	$5,681 \cdot 10^{26}$
Uranus	51118	2871,0	$8,681 \cdot 10^{25}$
Neptunus	49528	4497,1	$1,024 \cdot 10^{26}$

Tabell 2: Grundläggande data om solsystemet.

Namn	Värde	Enhet
Newtons gravitationskonstant (G)	$6,67408 \cdot 10^{-11}$	$\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$
Hubbles konstant (H_0)	70	$\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$
Solarkonstanten (G_{SC})	1360	W m^{-2}
Solens luminositet (L_\odot)	$3,826 \cdot 10^{26}$	W
Solens temperatur (T_\odot)	5777	K
Absolut magnitud av solen	4,83	mag
Apparent magnitud av solen	-26,74	mag
Plancks konstant (h)	$6,626 \cdot 10^{-34}$	J s
Ljusets hastighet i vakuum (c)	299792458	m s^{-1}
Ljusår (ly)	$9,461 \cdot 10^{12}$	km
Parsec (pc)	206265	Astronomiska enheter (AU)
Dalton (Da, u, amu)	$1,661 \cdot 10^{-27}$	kg
Dalton (Da, u, amu)	931,4941	$\text{MeV } c^{-2}$
Protonens massa	938,272088	$\text{MeV } c^{-2}$
Neutronens massa	939,565420	$\text{MeV } c^{-2}$
Elektronens massa	0,510998950	$\text{MeV } c^{-2}$
Boltzmanns konstant (k_B)	$1,381 \cdot 10^{-23}$	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmanns konstant (σ)	$\frac{\pi^2 k_B^4}{60h^3 c^2} = 5,6704 \cdot 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Atmosfäriskt tryck vid havsnivå (på jorden)	101,3	kPa
Siderisk dag	23,9344696	h
Julianskt år	365,25	dagar (24h)
Mänskliga ögats vinkelupplösning	60	as
Absolut magnitud av supernova 1a	-19,3	mag
Chandrasekhargränsen	1,44	M_\odot
Mörkenergidensitet	$6 \cdot 10^{-10}$	Jm^{-3}

Tabell 3: Fysikaliska värden.

Namn	Formel
Newtons gravitationslag	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
Centripetalacceleration	$a = \frac{v^2}{r}$
Fotonens rörelsemängd	$p = \frac{E}{c}$
Fotonens energi	$E = hf$
Stefan-Boltzmanns lag	$\frac{P}{A} = \sigma T^4$
Wiens lag	$\lambda_{max} T = 2,898 \text{ mm K}$
Keplers tredje lag	$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}$
Pascals lag	$p_{tot} = p_0 + \rho gh$
Ideala gaslagen	$pV = \frac{m}{M} k_B T$
Vis-viva ekvationen	$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$
Magnitudekvationen	$m - M = 5 \log\left(\frac{d}{10}\right) + A_\lambda$
Magnitud och flux	$m_1 - m_2 = -2,5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$
Parallaxekvationen	$d = \frac{1}{p''} \text{ pc}$
Rotationsenergi	$\frac{I\omega^2}{2}$ (I är rörelsemängdsmoment)
Tidsekvationen	$TE = TS - MS$
Leavitt's lag	$M = -2,78(\log(P) - 1) - 4,00$
Rödförskjutning	$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{rest}} = \sqrt{\frac{1+v_r/c}{1-v_r/c}} - 1 \approx \frac{v_r}{c}$
Rayleighs kriterie	$\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$
Focal ratio	$f/ = \frac{FL}{D}$
Ljusinsamlingsformeln	$LGP = \left(\frac{D}{D_{eye}}\right)^2$
Einsteins massa-energi relation	$E = mc^2$
Skalfaktorn beroende av z	$a(z) = \frac{1}{1+z}$
Kritiska densiteten	$\rho_{cr}(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}$
Hubbles lag	$H_0 r = v$
Schwarzschildradie	$R = \frac{2GM}{c^2}$

Tabell 4: Fysikaliska formler.